Regelbok i matematikk 1MX og 1MY

Utgave 1.4

Skrevet av Bjørnar Tollaksen.
Hele regelboka er et sammendrag av læreboka.
Dette er ment som et supplement til formelheftet, ikke en erstatning.
Skrivefeil kan forekomme, og jeg tar ikke ansvar for følgene av dette.

Innholdsliste

1. Tall og tallforståelse

1.1 Regning med hele tall

Tallene 1,2,3 ... kaller vi de *naturlige tallene*. De *hele tallene* består av de negative hele tallenel, tallet 0 og de naturlige tallene.

De hele tallene deler vi opp i *partall* og *oddetall*. Et partall er et tall som er delelig med 2, oddetall.
Partall: ... -6,-4,0,2,4,6 ...
Oddetall: ... -5,-3,-1,1,3,5,7 ...

De naturlige tallene som ikke er sammensatte, kaller vi *primtall*.
Primtall: 2,3,5,7,11,13,17,19 ...

Når du skal regne ut et uttrykk, gjør det **alltid** i denne rekkefølgen:
1. Regn først ut parentesuttrykkene
2. Regn deretter ut potensene
3. Gjør deretter multiplikasjonene og divisjonene
4. Gjør til slutt addisjonene og subtraksjonene (pluss og minus)

1.2 Brøkregning

For de som sliter med det: telleren er over brøkstreken, og nevneren under.
Husk også at brøken alltid skal være kortest mulig: 10/25 er lik 2/5. Du blir trukket i poeng for å ikke skrive 2/5.

- Når vi *utvider en brøk*, multipliserer vi med det samme tallet i telleren og nevneren.
- Når vi *vil forkorte en brøk*, dividerer vi med det samme tallet i telleren og nevneren.
- Når vi skal *summere brøker*, må vi først finne fellesnevneren. Deretter utvider vi alle brøkene så de får den samme nevneren. Til slutt summerer vi tellerne og lar nevneren stå som den er.
- Når vi skal *multiplisere et helt tall og en brøk*, multipliserer vi det hele tallet med telleren og beholder nevneren.
- Når vi skal *multiplisere to brøker*, multipliserer vi telleren med telleren og nevneren med nevneren. Vi trenger ikke finne fellesnevneren
- Når vi skal dividere med en brøk, multipliserer vi med den omvendte brøken.

1.3 Potenser

Uttrykket 2^4 kaller vi en *potens.* Denne potensen betyr 2*2*2*2. *Eksponenten* 4 forteller hvor mange ganger vi skal multiplisere *grunntallet* 2 med seg selv.

Regler:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$a^0 = 1$

$a^n = \frac{a}{a^n}$

1.4 Regneregler for potenser

Regler:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

1.5 Tall på standardform

Regel:
Et tall er skrevet på *standardform* når det er skrevet som

$$\pm a \cdot 10^n$$

der $1 \leq a < 10$ og n er et helt tall.

Eksempel:

$8700000 = 8{,}7 \cdot 1000000 = 8{,}7 \cdot 10^6$

1.6 Siffer og enheter

Regel:
I oppgaver der tallene er *målte* verdier, tar vi med omtrent like mange siffer i svaret som det er siffer i de tallene som er oppgitt.

1.7 Store og små tall

Når vi regner med spesielt store eller spesielt små tall, er det lurt å skrive tallene på standardform. Se 1.5.

1.8 Rasjonale og irrasjonale tall

Brøker og hele tall kaller vi *rasjonelle tall*. Dermed er også alle desimaltallene rasjonale tall, for de kan skrives som brøker.
Et tall som ikke kan skrives som en brøk, kaller vi et irrasjonalt tall.
Eksempel på dette: kvadratrota av 2.

De reelle tallene er alle de rasjonale og de irrasjonale tallene. Vi bruker ofte bokstaver *R* om de relle tallene. Når vi vil uttrykke at x er et reellt tall, skriver vi ofte

$$x \in R$$

Symbolet $\in$ betyr at ”ligger i” eller ”tilhører”.

2. Formler og likninger

2.1 Regning med bokstavuttrykk

Regel 1:
Når vi skal løse opp en parentes som har et minustegn foran seg, må alle leddene inne i parentesen skifte fortegn.
En parentes med et plusstegn foran kan vi fjerne uten å endre noe fortegn inne i parentesen.

Regel 2:
Når vi skal multiplisere et tall og et parentesuttrykk, må vi multiplisere tallet med hvert ledd som står inne i parentesen.
Når vi skal multiplisere to parentesuttrykk, må vi multiplisere hvert ledd i den første parentesen med hvert ledd i den andre.

2.2 Innsetting av tall i formler

Ofte får vi bruk for å sette inn tall for variabelen i et bokstavuttrykk eller i en formel. Da må vi passe på å følge de regnereglene vi har lært.

Eksempel:
$s = v \cdot t$
Hvor langt kjører bilen på 1 h 45 min når farten er 80 km/h?

t = 1 h 45 min = 1 h + 45/60 h = 4/4 h + 3/4 h = 7/4 h

Strekningen blir:
s = v * t = 80 km/h * 7/4 h = 80 * 7 / 4 km = 140 km

Skriv disse opp og bruk brøksteker i stedet for / hvis du sliter med å forstå. Unntaket er selvsagt km/h.

2.3 Lineære likninger

Regel:
Vi kan trekke fra eller legge til det samme talle på begge sidene av likhetstegnet.
Vi kan multiplisere eller dividere med det samme tallet på begge sider av likhetstegnet dersom tallet ikke er null.
Vi kan flytte et ledd over på den andre siden av likhetstegnet hvis vi samtidig skifter fortegn.

2.4 Omforming av formler

Eksempel:

$$s = vt \qquad t = \frac{v}{s} \qquad v = \frac{t}{s}$$

2.5 Proporsjonale størrelser

Regel:
To størrelser x og y er *proporsjonale* dersom det fins et tall a slik at $y = ax$ for alle sammenhørende verdier av x og y. Tallet a kaller vi *proporsjonalitetskonstanten*.
Grafen som viser sammenhengen mellom x og y, er ei rett linje gjennom origo.

To størrelser er proposjonale dersom forholdet mellom sammenhørende verdier konstant (lik proporsjonalitetskonstanten).

2.6 Omvendt proporsjonale størrelser

Regel:
To størrelser x og y er *omvendt proporsjonale* der det fins et tall a slik at $y = a/x$ for alle sammenhørende verdier av x og y. Tallet a kaller vi *proporsjonalitetskonstanten*.
Grafen som viser sammenhengen mellom x og y, er en *hyperbel*.

To størrelser er omvendt proporsjonale dersom produktet av dem er en konstant (proporsjonalitetskonstanten).

2.7 Prisindeks

$$\frac{pris}{indeks} \text{ (et år)} = \frac{pris}{indeks} \text{ (et annet år) el.}$$

$$\frac{indeks}{pris} \text{ (et år)} = \frac{indeks}{pris} \text{ (et annet år)}$$

2.8 Kroneverdi

$$kroneverdien = \frac{100}{indeksen}$$

$$kroneverdien \cdot indeksen = 100$$

$$kroneverdien \cdot indeksen \text{ (et år)} = kroneverdien \cdot indeksen \text{ (et annet år)}$$

2.9 Reallønn

$$reallønna = lønna \cdot kroneverdien$$

$$reallønn = \frac{100}{indeks}$$

3. Sannsynlighetsregning

3.1 Multiplikasjonsprinsippet

Regel:
Hvis i skal gjøre to valg med n_1 valgmuligheter i det første valget og n_2 valgmuligheter i det andre valget, fins det i alt

$$n_1 \cdot n_2$$

ulike kombinasjoner.

Hvis vi skal gjøre tre valg med n_1 valgmuligheter i det første valget, n_2 valgmuligheter i det andre valget og n_3 valgmuligheter i det tredje valget, fins det i alt

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$$

ulike kombinasjoner.

Regel:
Når vi skal velge k ganger og har n valgmuligheter, fins det i alt

$$n^k$$

ulike valgmuligheter

3.2 Sannsynlighet

Regel:
Hvis alle de N mulige utfallene i et forsøk er like sannsynliger, er

$$P(\text{et utfall}) = \frac{1}{N}$$

Regel:
Hvis vi gjør et forsøk mange ganger, blir den relative frekvensen for et utfall omtrent lik sannsynligheten for utfallet.

3.3 Hendinger

Regel:
Hvis alle de mulige utfallene er like sannsynlige, er sannsynligheten for hendingen A

$$P(A) = \text{tallet på gunstige utfall / tallet på mulige utfall}$$

Regel:
$P(\text{ikke } A) = 1 - P(A)$

3.4 Addisjonssetningen

Regel:
Dersom A og B er to hendinger som ikke har noe felles utfall, er

$$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B)$$

Regel:
P(*A* eller *B*) = *P*(*A*) +*P*(*B*) − *P*(*A* og *B*)

3.5 Uavhengige hendinger

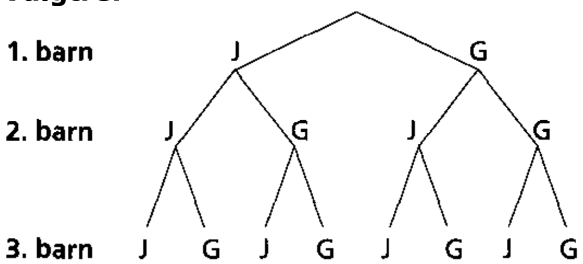
Regel:
To hendinger er uavhengige hvis en opplysning om at den ene hendingen har inntruffet, ikke endrer sannsynligheten for den andre hendingen.

Regel:
Hvis *A* og *B* er to uavhengige hendinger, så er
P(*A* og *B*) = *P*(*A*) * *P*(*B*)

Hvis A, B og C er tre uavhengige hendinger, så er
P(*A* og *B* og *C*) = *P*(*A*) * *P*(*B*) * *P*(*C*)

3.6 Sannsynlighetsmodeller

Valgtre:



3.7 Betinget sannsynlighet

Regel:
Den betingede sannsynligheten *P(A|B)* er sannsynligheten for at *A* skal inntreffe når vi vet at *B* har inntruffet.

Regel:
*P(A og B) = P(A) * P(B|A)*

4. Geometri

4.1 Formlike figurer

Regel:
I to formlike figurer er samsvarende vinkler like store.

I to formlike figurer er forholdet mellom samsvarende sider det samme uansett hvilke samsvarende sider vi velger.

4.2 Formlike trekanter

Regel:
I to formlike figurer er forholdet mellom to sider i den ene figuren lik forholdet mellom de samsvarende sidene i den andre figuren.

To trekanter er formlike hvis to av vinklene er parvis like store.

4.3 Pytagoras-setningen

Regel:
I en rettvinklet trekant der hypotenusen har lengden c og katetene er lengdene a og b, er

$$c^2 = a^2 + b^2$$

4.4 Areal

Regel:
Når vi forstørrer en figur slik at alle lengdene øker med en faktor f, blir arealet f^2 ganger så stort.

4.5 Volum

Regel:
Hvis vi forstørrer en gjenstand slik at alle lengdene øker med en faktor f, øker volumet med en faktor f^3.

4.6 Sirkelen

Regel:
En *sirkel* er bestemt av et punkt S og et tall r. Et punkt ligger på sirkelen hvis avstanden fra punktet til S er lik tallet r.
Punktet S kaller vi *sentrum*, og tallet r kaller vi *radien.*

Regel:
Omkretsen *O* av en sirkel er gitt ved formelen

$$O = 2\pi r$$

Arealet *A* er gitt ved formelen

$$A = \pi r^2$$

4.7 Ellipsen

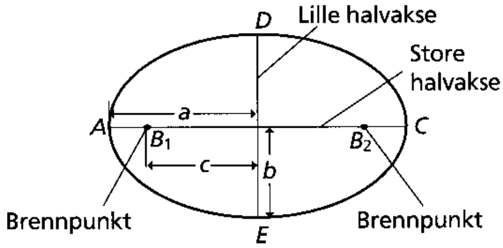
Regel:
En *ellipse* er bestemt av to brennpunkter og et tall *s* som er større enn avstanden mellom brennpunktene. Et punkt ligger på ellipsen hvis summen av avstandene fra punktet til de to brennpunktene er lik tallet *s*.

Regel:
Summen *s* av avstandene fra et punkt på ellipsen til brennpunktene er lik lengden *2a* av den store aksen.

Regel:
I en ellipse er

$$b^2 + c^2 = a^2$$

der *a* er den store halvaksen, *b* er den lille halvaksen, og *c* er halve avstanden mellom brennpunktene.

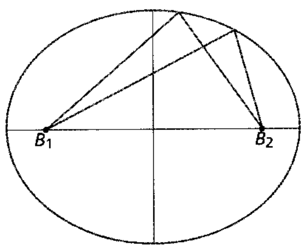


Regel:
Arealet *A* av en ellipse er

$$A = \pi ab$$

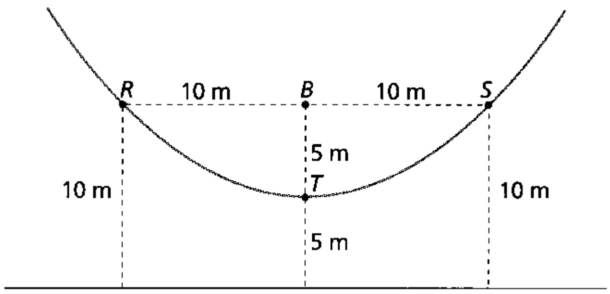
der *a* er den store halvaksen, og *b* er den lille halvaksen.

Regel:
En stråle gjennom det ene brennpunktet i en ellipse blir reflektert mot det andre brennpunktet.

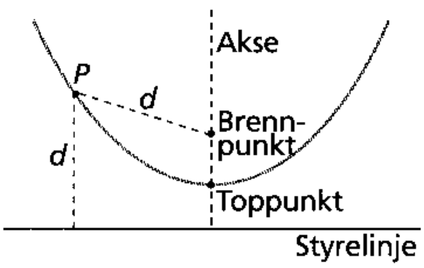


4.8 Parabelen og hyperbelen

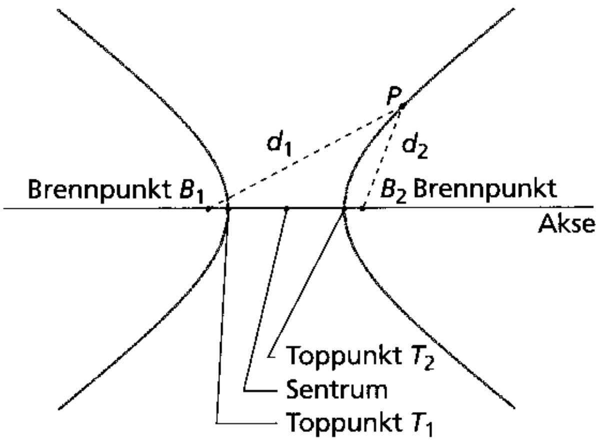
Regel:
En parabel er bestemt av et *brennpunkt* og ei *styrelinje*. Et punkt ligger på parabelen hvis det ligger like langt fra brennpunktet som fra styrelinja.



Parabelen reflekterer alle stråler som er parallelle med aksen, mot brennpunktet.



Regel:
En hyperbel er bestemt av to brennpunkter og et tall d som er mindre enn avstanden mellom brennpunktene. Et punkt ligger på hyperbelen hvis differansen mellom avstandene fra punktet til de to brennpunktene er lik tallet d.

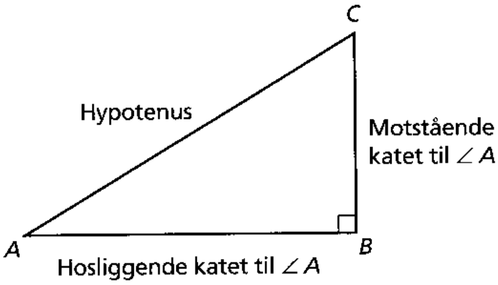


Differensen d mellom avstandene fra et punkt på hyperbelen til brennpunktene er lik avstanden mellom toppunktene.

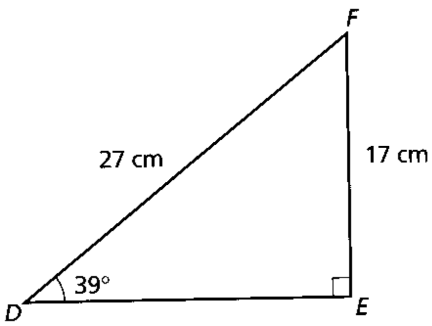
5. Trigonometri

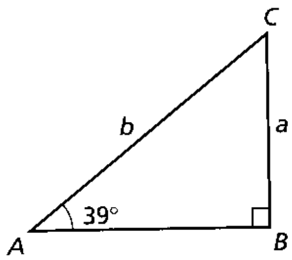
(Trigonometri betyr "trekantmåling", red. anm.)

5.1 Sinus til en vinkel



I en rettvinklet trekant er *hypotenusen* den motstående siden til den rette vinkelen. De to andre sidene kaller vi *katetene* i trekanten. Hvis [vinkel]A = 90°, kaller vi BC den *motstående kateten* til [vinkel]A, og AB den *hosliggende kateten* til [vinkel]A.





Disse to vinklene har to vinkler som er parvis like store (39° og 90°), og trekantene er derfor formlike. Forholdet mellom to sider i [trekant]ABC (AC og BC) er lik forholdet mellom de samsvarende sidene i [trekant]DEF (DF og EF).

$$\frac{\text{BC}}{\text{AC}} = \frac{\text{EF}}{\text{DF}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{17 \text{ cm}}{27 \text{ cm}} = 0{,}63$$

Her er *a* lengden av den motstående kateten til 39o, og *b* er lengden av hypotenusen i [trekant]ABC. Dermed er

$$\frac{\text{den motstående kateten til } 39^\circ}{\text{hypotenusen}} = 0{,}63$$

Regel:
I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel *v* er

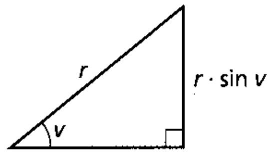
$$\sin v = \frac{\text{den motstående kateten til } v}{\text{hypotenusen}}$$

5.2 Bruk av sinus

Når vi multipliserer med hypotenusen på begge sider av likhetstegnet får vi denne regelen:

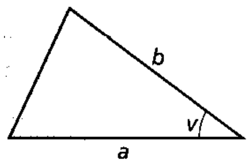
Regel:
I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel *v* er

den motstående kateten til *v* = hypotenusen * sin *v*



5.3 Arealsetningen

Regel:
Når vi i en trekant kjenner to sider, *a* og *b*, og vinkelen *v* mellom de to sidene, er arealet *A* av trekanten gitt ved



$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin v$$

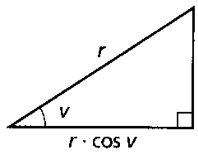
5.4 Cosinus til en vinkel

Regel:
I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel lik *v* er

$$\cos v = \frac{\text{den hosliggande kateten til v}}{\text{hypotenusen}}$$

Regel:
I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel *v* er

den hosliggande kateten til *v* = hypotenusen * cos *v*



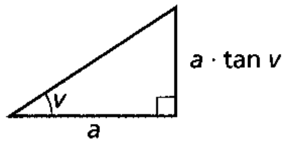
5.5 Tangens til en vinkel

Regel:
I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel lik *v* er

$$\tan v = \frac{\text{den motstående kateten til } v}{\text{den hosliggende kateten til } v}$$

Regel:
I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel *v* er

den motstående kateten til *v* = den hosliggende kateten * tan *v*



6. Rette linjer og lineære uttrykk

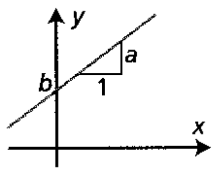
6.1 Rette linjer

Regel (helt sentral i dette kapittelet):
$y = ax + b$

Regel:
Konstantleddet (*b* i likningen øverst, red. anm.) forteller oss hvor grafen skjærer *y*-aksen.

Regel:
Den rette linja

$$y = ax + b$$



skjærer andreaksen i punktet $y = b$. Når x øker med én enhet, øker y med a enheter. Tallet a kaller vi stigninistallet, og b kaller vi konstantleddet.

Regel:
Ei horisontal linje har likningen $y = k$. Linja går gjennom tallet k på andreaksen.

Regel:
Ei vertikal linje har likningen $x = k$. Linja går gjennom tallet k på førsteaksen.

6.2 Å finne stigningstallet ved regning

Regel:
Ei linje som går gjennom punktene (x_1,y_1) og (x_2,y_2), har stigningstallet

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

6.3 Likningen for ei rett linje

Regel (ettpunktsformelen):
Ei linje har stigningstallet a og går gjennom punktet (x_1,y_1). Linja har likningen

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Eksempel:
$a=-2$, $x_1=-1$ og $y_1=4$

$y - y_1 = a(x - x_1)$
$y - 4= -2(x - (-1))$
$y - 4= -2(x + 1)$

y - 4= -2x - 2
y = -2x – 2 + 4

<u>y = -2x + 2</u>

6.4 Lineære matematiske modeller

6.5 Lineær regresjon på lommeregner

Dette har jeg ikke mulighet for å vise, da jeg ikke har utstyr til å få eksportert screenshots fra lommeregner.

6.6 Grafisk løsning av lineære likningssett

Når vi skal løse et lineært likningssett grafisk, finner vi *y* uttrykt med *x* i begge likningene. Dette gir likningene for to rette linjer. Vi tegner linjene i et koordinatsystem. Løsningen finner vi ved å lese av koordinatene til skjæringspunktet.

6.7 Innsettingsmetoden

Når vi skal løse et likningssett ved regning, finner vi et uttrykk for *x* eller *y* i en av likningene. Dette uttrykket setter vi inn i den andre likningen. Det gir oss en lineær likning som vi løser.

Eksempel:
5x – 2y = 4
x + y = 5

Vi finner et uttrykk for enten *x* eller *y* i en av likningene og sette dette uttrykket inn i den andre likningen. Her velger vi å finne et uttrykk for *x* fra den andre likningen:

x + y = 5
x = 5 – y

Dette uttrykket setter vi inn for *x* i den første likningen:

5x –2y = 4
5(5 – y) – 2y = 4
25 – 5y – 2y = 4
-7y = 4 – 25
-7y = -21
-y = -3

<u>y = 3</u>

7. Funksjoner og andregradslikninger

7.1 Funksjonsbegrepet

Regel:
y er en funksjon av *x* dersom hver mulig verdi for *x* gir nøyaktig én verdi for *y*.

7.1 Grafen til en funksjon

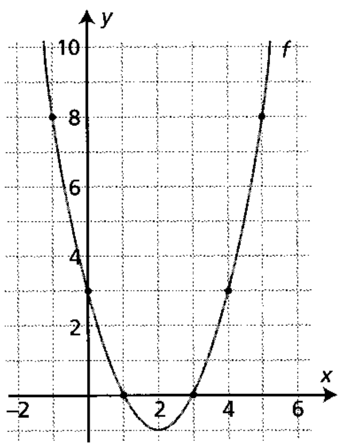
Når vi skal tegne grafen til en funksjon *f*, velger vi noen verdier for x og regner ut funksjonsverdiene *f(x)*. Disse punktene plotter vi i et koordinatsystem og trekker en kurve gjennom de. Vi ser her på funksjonen *f* med funksjonsuttrykket

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Det gir denne funksjonstabellen (utregningene er ikke tatt med):

x	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	8	3	0	-1	0	3	8

Vi markerer punktene (x, f(x)) i et koordinatsystem og får denne grafen:



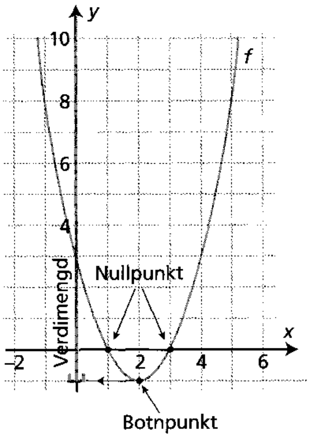
Vi kan også få opp funksjonverdiene på lommeregneren ved å gå inn på TABLE. Her skriver vi inn funksjonen, velger F5 (RANG) og setter inn verdier som passer til grafen. I tilfellet overfor vil det være:

TABLE RANGE

Start: -1
End: 5
Pitch: 1

7.3 Nullpunkt, toppunkt og bunnpunkt

I 7.2 tegnet vi denne grafen:



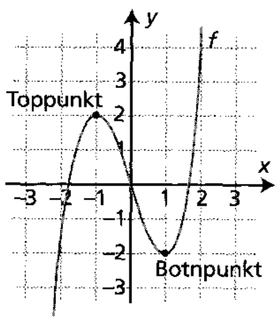
Regel:
x er et nullpunkt for *f* hvis *f*(*x*) = 0

De x-verdiene der *f*(*x*) = 0 kaller vi *nullpunktene* til *f.* På grafen finner vi nullpunktene der grafen skjærer x-aksen. Denne funksjonen har nullpunktene x = 1 og x = 3.

Vi har også et bunnpunkt i punktet (2, -1). I et bunnpunkt er funksjonverdien mindre enn alle nabopunktene. En funksjon kan også ha et *toppunkt*. Det er et et punkt der funksjonsverdien er større enn alle nabopunktene.

Noen funksjoner har både bunnpunkt og toppunkt. Dette er grafen til funksjonen

$$f(x) = x^3 - 3x$$



Grafen har et toppunkt i (-1, 2) og et bunnpunkt i (1, -2). Disse punktene er imidlertid bare lokale topper og bunner, da de ikke er funksjonenes høyeste og laveste verdier.

For å finne toppunktene og bunnpunktene på lommeregneren velger vi GRAPH på ikonmenyen og legge inn funksjonuttrykket:
$Y1 = -X^2 + 2X + 3$

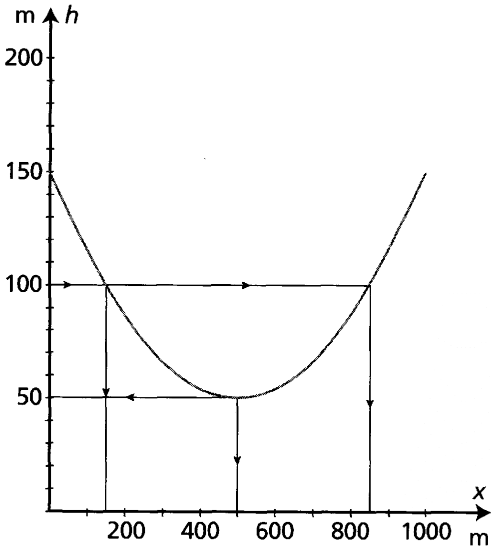
Vi velger G-Solv, og så F1 (ROOT). Vi finner da nullpunktene, som er x = -1 og x = 3.

Toppunkt: G-Solv, F2 (MAX), (1, 4)

Bunnpunkt (ikke på denne grafen): G-Solv, F3 (MIN).

7.4 Grafiske løsninger

Etter å ha tegnet opp en funksjon, leser vi at dataene på denne måten:



7.5 Andregradsligninger med to ledd

Ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kaller vi en andregradsligning. Vi løser den på denne måten:

$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = 2$ eller $x = -2$

Vi skriver ofte bare $x = \pm 2$ isteden for ovennevnte.

Regel:
$x = \pm a$ betyr $x = a$ eller $x = -a$

Hvis konstantleddet *c* mangler får vi en andregradsligning av denne typen:

$$ax^2 + bx = 0$$

Når vi multipliserer to tall som ikke er null, kan vi ikke få null som svar. Hvis vi vet at produktet av to tall er null, så må altså et av tallene være null. Denne slutningen kaller vi *produktregelen*:

Produktregelen:
Hvis $a * b = 0$, så er $a = 0$ eller $b = 0$

7.6 Andregradsformelen

Regel:
Andregradsligningen $ax^2 + bx + c$ har løsningene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

når $b^2 - 4ac \geq 0$.

7.7 Praktisk bruk av andregradsligninger

Siden dette er en regelbok, tar jeg ikke med eksemplene som er vist i boka. Du må som kjent kunne stoffet for å nyttegjøre deg av regelboka, og jeg tar her bare for meg grove trekk i lærebokstoffet.

7.8 Polynomfunksjoner

Uttrykkene $2x + 3$ og $x^2 + 3x - 5$ kaller vi *polynom*. Uttrykket $2x + 3$ er et polynom av første grad, og uttrykket $x^2 + 3x - 5$ er et polynom av andre grad.

Den høyeste eksponenten til variabelen i et polynom kaller vi *graden til polynomet*. Polynomet $2x^3 + 3x^2 - 6x + 4$ er av tredje grad, og polynomet $x^4 + 2x^2 + 5x + 4$ er av fjerde grad.

7.9 Rasjonale funksjoner

Regel:
En rasjonal fuksjon har et bruddpunkt der nevneren er null.

8. Potensfunksjoner og eksponentialfunksjoner

8.1 Potensfunksjonen

Funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = 2x^3$$

er en potensfunksjon. Alle potensfunksjoner er på formen

$$f(x) = ax^b$$

der tallet *a* og eksponenten *b* kan være positive eller negative tall.
Her er et funksjonsuttrykk med negativ eksponent:

$f(x) = 4x^{-2}$

8.2 Kvadratrøter og røter av høyere orden

Regel:
$\sqrt{x}$ = a hvis $a^2 = x$ og $a \geq 0$

Regel:
$\sqrt[n]{x}$ = a hvis $a^n = x$

Hvis a er et partal, velger vi $\sqrt[n]{x}$ som et positivt tall

Eksempel:

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

fordi

$$2^4 = 16$$

8.3 Prosentfaktorer og vekstfaktorer

Regel:
Vi regner ut *p*% av et tall på denne måten:

p% av et tall = prosentfaktoren * tallet

der prosentfaktoren er $\dfrac{P}{100}$

Hvis p = 40 blir prosentfaktoren da 0,40.

Regel:
Ved p% økning er vekstfaktoren = 1 + prosentfaktoren = 1 + $\frac{p}{100}$

Ved p% nedgang er vekstfaktoren = 1 – prosentfaktoren = 1 - $\frac{p}{100}$

Ved p% økning eller nedgang er

ny verdi = gammel verdi * vekstfaktoren

8.4 Prosentvis endring i flere perioder

Regel:
Hvis en størrelse vokser eller minsker med en fast prosent i n perioder, blir størrelsen

startverdien * (vekstfaktoren)^n

Hvis vi kaller startverdien for B0 og vekstfaktoren for k, er verdien B etter n perioder gitt ved

$B = B_0 * k^n$

Hvis n er et negativt tall er B verdien for n perioder siden.

Eksempel 1:
10 000 kr. på sparekonto i 5 år. Renta er 4 %.

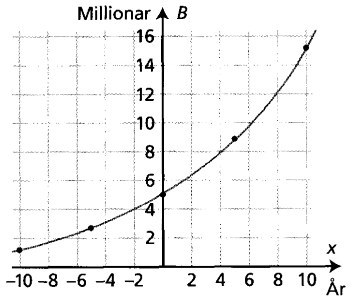
$B = B_0 * k^n$
$B = 10\ 000 * 1{,}04^5$
$B = 12\ 166{,}53$

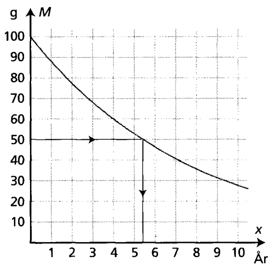
Eksempel 2:
Har 10 000 kr. på sparekonto. Renta er 4 %. Hvor mye var det på kontoen for 5 år siden?

$B = B_0 * k^n$
$B = 10\ 000 * 1{,}04^{-5}$
$B = 8\ 219{,}27$

8.5 Eksponentialfunksjonen

En størrelse som øker eksponentielt, vil etter hver vokse kraftig. En eksponetialfunksjon vil se ut som disse to, avhengig av om vekstfaktoren er negativ eller positiv.





8.6 Logaritmer

Regel:
La *a* være et positivt tall. Med logaritmen til *a* (lg *a*) mener vi det tallet vi må opphøye 10 i for å få *a*.

$$10^{\lg a} = a$$

8.7 Eksponentiallikninger

En eksponentiallikning er en likning der den ukjente er en eksponent. Likningen

$$3^x = 7$$

er en slik eksponentiallikning. Vi løser den på denne måten:

$$3^x = 7$$
$$\lg 3^x = \lg 7$$
$$x \cdot \lg 3 = \lg 7$$
$$\frac{x \cdot \lg 3}{\lg 3} = \frac{\lg 7}{\lg 3}$$
$$x = \frac{\lg 7}{\lg 3}$$
$$x = 1{,}77$$

8.8 Datering av historiske funn

Regel:
Vi har en menge N_0 av et radioaktivt stoff med halveringstid H år. Etter t år er mengden redusert til

$$N(t) = N_0 * 2^{-t/h}$$

Eksempel:
t år etter at en levende organisme døde, er andelen av C14-isotoper redusert til *p* % av mengden i den levende organismen, der

$$p = 100 * 2^{-t/5730}$$

9. Algebra

9.1 Mer om prosenter

Regel:
Hvis *a* er et positivt tall og *n* er et naturlig tall, er

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Eksempel:
$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$ <- ($\sqrt[2]{a}$ er det samme som $\sqrt{a}$)

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 9$

Regel:
Hvis *a* er et positivt tall, *m* et helt tall og *n* et naturlig tall, definerer vi

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{eller} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Eksempel:
$8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$

9.2 Kvadratsetningene

Første kvadratsetning: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Andre kvadratsetning: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Tredje kvadratsetning: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

9.3 Faktorisering

Et uttrykk består av flere ledd dersom det er sammensatt av flere deluttrykk med plusstegn eller minustegn mellom. Uttrykket

$$5xy + 3(x+y) - y^2$$

består av de tre leddene 5xy, 3(x+y) og y^2.

Eksempel:
$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$

$x^2 - 5 = x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right)$

9.4 Fullstendige kvadrater

Regel:

Uttrykket x^2+bx+c er et fullstendig kvadrat dersom $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$. Da er

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

9.5 Nullpunkter og faktorisering

Regel:
Dersom andregradsuttrykket ax^2+bx+c har nullpunktene $x=x_1$ og $x=x_2$, er

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

Dersom andregradsuttrykket bare har ett nullpunkt x=x1, er

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)^2$$

Dersom andregradsutrrykket ikke har nullpunkter, kan det ikke faktoriseres i førstegradsfaktorer.

9.6 Nullpunkter og koeffisienter

Regel:
Produktet av nullpunktene til andregradsuttrykket x^2+bx+c er lik tallet c.

Summen av nullpunktene er lik tallet –b.

9.7 Rasjonale uttrykk

Et rasjonalt uttrykk er en brøk med bokstavuttrykk i telleren og i nevneren. Uttrykket

$$\frac{4x^2 + 2x}{6x}$$

er et eksempel på et slikt rasjonalt uttrykk. Vi bruker regnereglene for brøker når vi omformer rasjonale uttrykk.

Eksempel:

$$\frac{2x+4}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{6x} = \frac{(2x+4)\cdot\left(x^2-1\right)}{(x-1)\cdot 6x} = \frac{2(x+2)(x-1)(x+1)}{6x(x-1)} = \frac{(x+2)(x+1)}{3x} = \frac{x^2+3x+2}{3x}$$

9.8 Rasjonale likninger

En brøk er ikke definert når nevneren er null. I rasjonale uttrykk må vi derfor passe på at nevneren ikke blir null. I uttrykket

$$\frac{x+1}{x(x-2)}$$

er nevneren null når x = 0, og når x = 2. Det er ikke mulig å sette inn x = 0 eller x = 2 i uttrykket. Derfor må vi forutsette at $x \neq 0$ og $x \neq 2$ når vi regner med dette uttrykket. Slike forutsetninger er svært viktige når vi løser likninger der den ukjente er med i nevneren.

(”≠” betyr ”ikke lik” , i motsetning til ”=”, som betyr ”lik”)

9.9 Ikke-lineære likningssett

Når vi skal løse to likninger med to ukjente der den ene av likningene er av andre grad, finner vi et uttrykk for en av de ukjente fra førstegradslikningen, og sette denne inn i andregradslikningen.

Eksempel:
Løs likninssettet

$$3x + y = 3$$
$$3x^2 - y^2 = -9$$

Løsning:
Førstegradslikningen gir y = 3 – 3x. Dette uttrykket for y setter vi inn i den andre likningen.

$$3x^2 - (3-3x)^2 = -9$$
$$3x^2 - (9 - 18x + 9x^2) = -9$$
$$3x^2 - 9 + 18x - 9x^2 = -9$$
$$-6x^2 - 18x = -9 + 9$$
$$-6x(x-3) = 0$$
$$-6x = 0 \lor x = 3$$

Det fins to x-verdier som er løsning. For hver x-verdi regner vi ut en tilhørende y-verdi.
$x = 0$ gir $y = 3 - 3x = 3 - 3 \cdot 0 = 3$
$x = 3$ gir $y = 3 - 3x = 3 - 3 \cdot 3 = -6$

Løsningene blir
x = 0 og y = 3 eller x = 3 og y = -6

9.10 Beviset for andregradsformelen

Funnet totalt irrelevant for prøver, og er derfor sløyfet fra regelboka.

10. Funksjoner, vekst og areal

10.1 Gjennomsnittlig vekst

Regel:
Den gjennomsnittlige veksten funksjonen *f* i intervallet $[x_1, x_2]$, er

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Hvis grafen til *f* er ei rett linje, er veksten lik stigningstallet til linja.

10.2 Momentan vekst

Regel:
Den momentane veksten til funksjonen *f* i punktet $x = x_0$ er det tallet som den gjennomsnittlige veksten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i intervallet $[x_0, x]$ nærmer seg når x nærmer seg x_0. Her er $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, og $\Delta x = x - x_0$.

Vi finner en tilnærmingsverdi for den momentane veksten ved å regne ut $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ for en verdi av x som er svært nær x_0.

10.3 Tangenter

Regel:
Vi finner den momentane veksten til en funksjon *f* i punktet $x = x_0$ grafisk ved å tegne tangenten til grafen i punktet $(x_0, f(x_0))$ og lese av stigningstallet.

10.4 Arealet under en graf

Regel:
Når vi skal finne en tilnærmingsverdi for arealet A mellom grafen til *f* og x-aksen fra $x = a$ til $x = b$, deler vi intervallet $[a, b]$ i n like store deler. Ut fra hver slik del tegner vi et rektangel der den venstre siden av rektangelet rekker opp til grafen. Arealet av de n rektanglene er en tilnærmingsverdi til arealet A.

10.5 Bestemte integraler

Regel:
La *f* være en funksjon som er slik at grafen til *f* ligger over x-aksen i intervallet $[a, b]$. Med det bestemte integralet $\int f(x)dx$ mener vi det eksakte arealet av flatestykket mellom x-aksen og grafen fra $x = a$ til $x = b$.